

1 Kompletterande övningar i vektoranalys

1.1 Linjeintegraler

1. Beräkna integralen $\int_C y ds$, där C ges av att $x^2 + y^2 = a^2$ och $y \geq 0$.
2. Bestäm massan av tråden som finns längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $0 \leq t \leq 1$ och som har densiteten $\rho(\mathbf{r}(t)) = 1 + t$.
3. Bestäm $\int_C y^2 ds$ där C är skärningen mellan planen $x - y + z = 0$ och $x + y + 2z = 0$ från origo till punkten $(3, 1, -2)$.

1.2 Ytintegraler

4. Bestäm arean av den del av planet $Ax + By + Cz = D$ som ligger i den elliptiska cylindern $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
5. Beräkna ytintegralen $\iint_S z dS$ över konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ då $0 \leq z \leq 1$.
6. Beräkna ytintegralen $\iint_S y dS$ där S är den del av planet $z = 1 + y$ som ligger i konen $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

1.3 Greens formel

7. Beräkna $\oint_L (x - y^3)dx + (y^3 + x^3)dy$ då L är randen till området $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, tagen ett varv moturs.
8. Beräkna $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$ då L är randen till området $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ tagen ett varv moturs.

2 Svar

2.1 Linjeintegraler

1. $2a^2$
2. 8
3. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

2.2 Ytintegraler

4. $\frac{\pi ab \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}$
5. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$
6. 2π

2.3 Greens formel

7. $\frac{3\pi a^4}{8}$
8. $-\frac{81\pi}{4}$